第５講　共有点と面積，体積

5　k を正の定数として，$C_1: y=\sin 2x\ \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$，$C_2: y=k\cos x\ \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とする．C_1 と C_2 が $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ に共有点をもつとする．

次の各問いに答えよ．

(1)　k の値の範囲を求めよ．

(2)　C_1 と C_2 の $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ における共有点の x 座標を α として，k と α の関係式を求めよ．

(3)　C_1 と x 軸で囲まれる部分の面積を S_1，C_1 と C_2 で囲まれる部分の面積を S_2 として，$S_2=\dfrac{1}{4}S_1$ となるときの k を求めよ．

(4)　k が(3)の値をとるとき，C_1 と C_2 で囲まれる部分を x 軸まわりに回転してできる回転体の体積 V を求めよ．

第５講　共有点と面積，体積

5 k を正の定数として，$C_1: y=\sin 2x\ \left(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right)$，$C_2: y=k\cos x\ \left(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ とする．C_1 と C_2 が $0<x<\frac{\pi}{2}$ に共有点をもつとする．

次の各問いに答えよ．

(1) k の値の範囲を求めよ．

(2) C_1 と C_2 の $0<x<\frac{\pi}{2}$ における共有点の x 座標を α として，k と α の関係式を求めよ．

(3) C_1 と x 軸で囲まれる部分の面積を S_1，C_1 と C_2 で囲まれる部分の面積を S_2 として，$S_2=\frac{1}{4}S_1$ となるときの k を求めよ．

(4) k が(3)の値をとるとき，C_1 と C_2 で囲まれる部分を x 軸まわりに回転してできる回転体の体積 V を求めよ．

【答】 (1) $0<k<2$　(2) $\sin\alpha=\frac{k}{2}$　(3) $k=1$　(4) $\frac{3\sqrt{3}}{16}\pi$

【解説】 (1) $\sin 2x=k\cos x$ より $(2\sin x-k)\cos x=0$ なので $\cos x=0$ または $\sin x=\frac{k}{2}$．$\cos x=0$ より $x=\frac{\pi}{2}$ なので，C_1 と C_2 が $0<x<\frac{\pi}{2}$ に共有点をもつ条件は $0<\frac{k}{2}<1$ つまり $0<k<2$．

(2) (1)より $\sin x=\frac{k}{2}$ の解が α なので $\sin\alpha=\frac{k}{2}$．

(3) C_1 と x 軸で囲まれる部分の面積が S_1 より

$$S_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,dx = \left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$$

C_1 と C_2 で囲まれる部分の面積が S_2 より

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x - k\cos x)\,dx \\ &= \left[-\frac{1}{2}\cos 2x - k\sin x\right]_\alpha^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{2}-k+\frac{1}{2}\cos 2\alpha + k\sin\alpha \end{aligned}$$

ここで $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=1-2\left(\frac{k}{2}\right)^2=1-\frac{1}{2}k^2$，$\sin\alpha=\frac{k}{2}$ より

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{1}{2}-k+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}k^2\right)+k\cdot\frac{k}{2} \\ &= \frac{1}{4}k^2-k+1 \end{aligned}$$

となるので，$S_2=\dfrac{1}{4}S_1$ より $\dfrac{1}{4}k^2-k+1=\dfrac{1}{4}\cdot 1 \iff (k-3)(k-1)=0$

これと(1)の結果より $k=1$.

(4)　$k=1$ より $\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$ なので $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$ である．このとき

$$
\begin{aligned}
V &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \pi(\sin 2x)^2\,dx-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \pi(\cos x)^2\,dx \\
&= \pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 2x-\cos^2 x)\,dx \\
&= \pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{\cos 4x+\cos 2x}{2}\right)dx \\
&= \pi\left[-\frac{\sin 4x+2\sin 2x}{8}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \pi\times\frac{\sin\frac{2}{3}\pi+2\sin\frac{\pi}{3}}{8} \\
&= \frac{3\sqrt{3}}{16}\pi
\end{aligned}
$$